# DEVOIR MAISON N°1

*À rendre au plus tard le lundi 4 septembre 2023.*

---

## ■ Exercice 1.

**1)** Discuter, suivant les valeurs des réels $a$ et $b$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-a-\frac{b}{n}\right)$.

**2)** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

**3)** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

---

## ■ Exercice 2.

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad u_n=\frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,\quad \text{et}\quad v_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

**1)** (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{1+\frac{1}{n}}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$v_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

**2)** Rappelez le développement limité de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

**3)** Montrer qu'il existe un nombre réel $a>0$ que l'on précisera tel que : $\displaystyle v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{a}{n^2}$.

**4)** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}v_n$ converge.

**5)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}v_k$.

**6)** En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre $\ell\in\mathbb{R}$.

**7)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

**8)** Conclure qu'il existe un réel $C>0$ (que l'on ne déterminera pas) tel que :

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

**9)** **Applications.**

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner un équivalent de $(2n)!$.

(b) En déduire que :

$$\binom{2n}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}4^n\times\frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{n}}.$$

(c) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.